



В. И. АРНОЛЬД

ЛЕКЦИИ
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(25—29)

Часть 5-я

ЛЕКЦИЯ 25

ВНЕШНИЕ ФОРМЫ

Для изложения "Гамильтоновой" или "Канонической" механики нам потребуется аппарат дифференциальных форм. Вначале напомним основные свойства внешних алгебраических форм. Рутинные доказательства ряда утверждений линейной алгебры оставлены читателю в виде задач. Решение задач обязательно для понимания дальнейшего.

Пусть $\mathbb{R}^n$ n -мерное вещественное линейное пространство.* Вектора этого пространства будем обозначать через $\xi, \eta, \dots$.

Определение. Формой степени I (или, короче, I-формой) называется линейная функция от вектора $\omega(\xi)$:

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2 \omega(\xi_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$$

Напомним основные факты об I-формах, известные из линейной алгебры. Множество всех I-форм превращается в вещественное линейное пространство, если определить сумму форм формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi),$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda \omega)(\xi) = \lambda \omega(\xi)$$

Пространство I-форм на $\mathbb{R}^n$ само n -мерно и называется также сопряженным пространством, $(\mathbb{R}^n)^*$.

Ж) Существенно отметить, что мы не фиксируем в $\mathbb{R}^n$ никакой специальной евклидовой структуры. В некоторых примерах такая структура используется; тогда это специально оговорено — ("евклидово $\mathbb{R}^n$ ").

Пусть теперь в $\mathbb{R}^n$ выбрана линейная система координат, $x_1, x_2, \dots, x_n$. Каждая координата, например, x_i , самая является 1-формой. Эти n 1-форм линейно независимы. Поэтому каждая 1-форма ω имеет вид

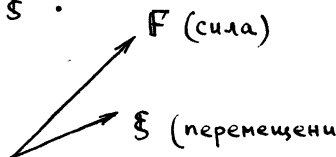
$$\omega = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Значение ω на векторе ξ равно

$$\omega(\xi) = a_1 x_1(\xi) + a_2 x_2(\xi) + \dots + a_n x_n(\xi)$$

где $x_1(\xi), \dots, x_n(\xi)$ - компоненты вектора ξ в выбранной системе координат.

Пример. Если в евклидовом $\mathbb{R}^3$ дано однородное силовое поле F , то его работа A на перемещении ξ есть 1-форма от ξ .



$$\omega(\xi) = (F, \xi)$$

Определение. Внешней формой степени 2 (или, короче, 2-формой) называется функция от пары векторов $\omega^2(\xi_1, \xi_2)$, которая билинейна и кососимметрична:

$$\omega^2(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \xi_3) = \lambda_1 \omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2 \omega^2(\xi_2, \xi_3)$$

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = -\omega^2(\xi_2, \xi_1)$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n,$$

Пример 1. Пусть $S(\xi_1, \xi_2)$ — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах ξ_1, ξ_2 ориентированной евклидовой плоскости R^2 , т.е.

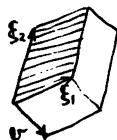
$$S(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \text{ где } \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 \\ \xi_2 &= \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 \end{aligned}$$

и e_1, e_2 — базис, задающий ориентацию R^2 .

Легко видеть, что $S(\xi_1, \xi_2)$ есть 2-форма:



Пример 2. Пусть U — однородное поле скоростей жидкости в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве. Тогда поток жидкости через площадь параллелограмма ξ_1, ξ_2 есть билинейная кососимметрическая функция от ξ_1, ξ_2 , т.е. 2-форма



$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = (U, \xi_1, \xi_2)$$

Пример 3. Ориентированная площадь проекции параллелограмма со сторонами ξ_1, ξ_2 в евклидовом R^3 на плоскость x_1, x_2 есть 2-форма.

Задача. Докажите, что для всякой 2-формы ω^2 в R^n имеем

$$\omega^2(\xi, \xi) = 0, \quad \forall \xi \in R^n$$

Решение. Ввиду кососимметричности, $\omega^2(\xi, \xi) = -\omega^2(\xi, \xi)$.
 Множество всех 2-форм в $\mathbb{R}^n$ врезщается в вещественное линейное пространство, если определить сложение форм формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1, \xi_2) + \omega_2(\xi_1, \xi_2)$$

а умножение на число - формулой

$$(\lambda \omega)(\xi_1, \xi_2) = \lambda \omega(\xi_1, \xi_2)$$

Задача. Докажите, что это пространство конечномерно, и найдите его размерность.

Ответ. $\frac{n(n-1)}{2}$; базис указан ниже.

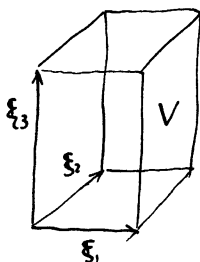
Определение. Внешней формой степени k , или k -формой, называется функция от k векторов, $\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$, которая k -линейна и кососимметрична:

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \lambda_1 \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + \lambda_2 \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

$$\omega(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) = (-1)^y \omega(\xi_1, \dots, \xi_k), \text{ где } y = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \text{ четная.} \\ 1, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пример I. Ориентированный объем параллелепипеда с ребрами $\xi_1, \dots, \xi_n$ в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ есть n -форма

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$



где $\xi_i = \xi_{i1}e_1 + \dots + \xi_{in}e_n$ и $e_1, \dots, e_n$ — базис $\mathbb{R}^n$.

Пример 2. Пусть $\mathbb{R}^k$ k -мерная ориентированная плоскость в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда k -мерный ориентированный объем проекции параллелепипеда с ребрами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^k$ есть k -форма на $\mathbb{R}^n$.

Множество всех k -форм в $\mathbb{R}^n$ становится вещественным линейным пространством, если ввести в нем операции сложения

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi), \quad \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}, \xi_i \in \mathbb{R}^n$$

и умножения на число

$$(\lambda \omega)(\xi) = \lambda \omega(\xi)$$

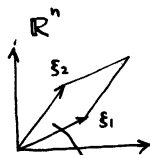
Задача. Доказать, что это линейное пространство конечномерно и найти его размерность. (Ответ: C_n^k , базис указан ниже).

Введем теперь еще одну операцию: внешнее умножение форм. Если ω^k — k -форма и ω^l — l -форма в $\mathbb{R}^n$, то их внешнее произведение $\omega^k \wedge \omega^l$ будет $k+l$ -формой. Вначале определим внешнее произведение 1-форм, сопоставляя каждой паре 1-форм ω_1, ω_2 в $\mathbb{R}^n$ некоторую 2-форму $\omega_1 \wedge \omega_2$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть ξ — вектор $\mathbb{R}^n$. Имея две 1-формы, ω_1 и ω_2 , можно определить "копроектию" $\mathbb{R}^n$ на плоскость ω_1, ω_2 , сопоставляя $\xi \in \mathbb{R}^n$ вектор $\omega(\xi)$ с компонентами $\omega_1(\xi), \omega_2(\xi)$ на плоскости ω_1, ω_2 .

Определение. Значение внешнего произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$ на паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ есть ориентированная площадь копроекции параллелограмма ξ_1, ξ_2 на плоскость ω_1, ω_2 :

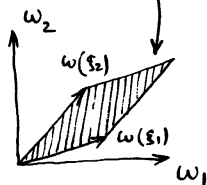
$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{vmatrix}$$



Задача. Доказать, что $\omega_1 \wedge \omega_2$ действительно есть 2-форма.

Задача. Доказать, что отображение

$$\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2$$



билинейно и кососимметрично:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1, (\lambda^1 \omega_1^1 + \lambda^2 \omega_1^2) \wedge \omega_2 = \lambda^1 \omega_1^1 \wedge \omega_2 + \lambda^2 \omega_1^2 \wedge \omega_2$$

Указание. Определитель билинеен и кососимметричен не только по строкам, но и по столбцам.

Пусть теперь в R^n выбрана система линейных координат, т.е. заданы n независимых 1-форм $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти формы мы будем называть базисными.

Внешние произведения базисных форм суть 2-формы $x_i \wedge x_j$. Ввиду кососимметричности, $x_i \wedge x_i = 0$, $x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i$. Геометрический смысл формы $x_i \wedge x_j$ очень прост: ее значение на паре векторов ξ_1, ξ_2 равно площади проекции параллелограмма ξ_1, ξ_2 на координатную плоскость x_i, x_j параллельно остальным координатным направлениям.

Задача. Докажите, что $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ форм $x_i \wedge x_j$ ($i < j$) линейно независимы.

В частности, в трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3 площадь проекции на плоскость x_1, x_2 есть $x_1 \wedge x_2$, на

плоскость $x_2, x_3 - x_2 \wedge x_3$, на плоскость $x_3, x_1 - x_3 \wedge x_1$.

Задача. Докажите, что все 2-формы в трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3 исчерпываются формами

$$P x_2 \wedge x_3 + Q x_3 \wedge x_1 + R x_1 \wedge x_2$$

Задача. Докажите, что каждая 2-форма в n -мерном пространстве с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ однозначно представляется в виде

$$\omega^2 = \sum_{i < j} a_{ij} x_i \wedge x_j$$

Указание. Пусть e_i i -ый базисный вектор, т.е. $x_i(e_i) = 1$, $x_j(e_i) = 0$, $j \neq i$. Рассмотрим значения формы ω^2 на паре e_i, e_j . Тогда

$$a_{ij} = \omega^2(e_i, e_j)$$

Пусть теперь даны k 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$. Определим их внешнее произведение $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k$.

Определение. Положим

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \dots & \omega_k(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(\xi_k) & \dots & \omega_k(\xi_k) \end{vmatrix}$$

Иными словами, значение произведения 1-форм на параллелепипеде $\xi_1, \dots, \xi_k$ равно объему копроекции параллелепипеда на ориентированное евклидово пространство с координатами

$$\omega_1, \dots, \omega_k.$$

Задача. Докажите, что $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ есть k -форма.

Задача. Докажите, что операция внешнего умножения 1-форм задает полилинейное кососимметрическое отображение

$$\omega_1, \dots, \omega_k \rightarrow \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$$

Иными словами

$$(\lambda^1 \omega_1^1 + \lambda^2 \omega_1^2) \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k = \lambda^1 \omega_1^1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k + \lambda^2 \omega_1^2 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k$$

$$\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} = (-1)^{\gamma} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k, \text{ где } \gamma = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка} \\ & i_1, \dots, i_k \text{ четная} \\ 1, & \text{если перестановка} \\ & i_1, \dots, i_k \text{ нечетная} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь в R^n систему координат, заданную базисными формами $x_1, \dots, x_n$. Внешние произведения k базисных форм

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \quad 1 \leq i_m \leq n$$

суть ориентированные объемы проекций k -параллелепипедов на k -плоскость $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ параллельно остальным координатным направлениям.

Задача. Докажите, что если среди индексов $i_1, \dots, i_k$ есть два одинаковых, то форма $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$ равна 0.

Задача. Докажите, что формы

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \text{ где } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

линейно независимы.

Число таких форм, очевидно, C_n^k . Мы будем называть их базисными k -формами.

Задача. Докажите, что каждая k -форма в $\mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде линейной комбинации базисных:

$$\omega^k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

Указание: $a_{i_1 \dots i_k} = \omega^k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$

из результата этой задачи следует, что размерность линейного пространства k -форм в $\mathbb{R}^n$ равна C_n^k . В частности, при $k=n$, $C_n^k=1$, откуда вытекает

Следствие. Всякая n -форма в $\mathbb{R}^n$ есть либо ориентированный объем параллелепипеда при некотором выборе единицы объема, либо нуль:

$$\omega^n = a \cdot x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

Задача. Доказать, что всякая k -форма в $\mathbb{R}^n$ при $k > n$ равна 0.

Переходим теперь к умножению k -формы ω^k на l -форму ω^l . Пусть вначале даны два одночлена

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k, \quad \omega^l = \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{k+l}$ - 1-формы. Их произведение $\omega^k \wedge \omega^l$ мы определим как одночлен

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}) = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}$$

Задача. Докажите, что умножение одночленов ассоциативно:

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$$

и косокоммутативно:

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$$

Указание. Чтобы переставить каждый из l множителей ω^l вперед нужно k инверсий с k множителями ω^k .

Замечание. Полезно запомнить, что косокоммутативность означает коммутативность, если хотя бы одна из степеней k, l четная; и антикоммутативность, если обе степени k, l — нечетные.

ЛЕКЦИЯ 26

ВНЕШНЕЕ УМНОЖЕНИЕ

Мы определим теперь внешнее умножение производной k -формы ω^k на произвольную l -форму ω^l . Результат $\omega^k \wedge \omega^l$ будет $k+l$ -формой. Операция умножения окажется

- 1) косокоммутативной: $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$
- 2) дистрибутивной: $(\lambda_1 \omega_1^k + \lambda_2 \omega_2^k) \wedge \omega^l = \lambda_1 \omega_1^k \wedge \omega^l + \lambda_2 \omega_2^k \wedge \omega^l$
- 3) ассоциативной: $(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$

Определение. Внешним произведением $\omega^k \wedge \omega^l$ k -формы ω^k в $\mathbb{R}^n$ на l -форму ω^l в $\mathbb{R}^n$ называется $k+l$ -форма в $\mathbb{R}^n$, значение которой на $k+l$ векторах $\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l} \in \mathbb{R}^n$ равно

$$\omega^k \wedge \omega^l(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum (-1)^v \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}) \quad (I)$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_l; i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ — перестановка цифр $1, 2, \dots, k+l$

II

$$a \nu = \begin{cases} I, & \text{если эта перестановка нечетна} \\ 0, & \text{если } \quad \quad \quad \text{четна} \end{cases}$$

Иными словами, каждое разбиение $k+l$ векторов $\xi_1, \dots, \xi_{k+l}$ на две группы (из k и из l векторов) дает одно слагаемое в нашей сумме (I). Это слагаемое равно произведению значения k -формы ω^k на k векторах первой группы на значение l -формы ω^l на l векторах второй группы, со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, как упорядочены вектора в группах. Если они упорядочены так, что написанные подряд k векторов первой группы и l векторов второй образуют четную перестановку векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+l}$, то берется знак $+$, а если нечетную - знак $-$.

Пример. Если $k=2$, то разбиений всего два: ξ_1, ξ_2 и ξ_2, ξ_1 . Поэтому,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_2(\xi_1)\omega_1(\xi_2)$$

в согласии с определением умножения I-форм из предыдущей лекции.

Задача. Доказать, что произведенное выше определение действительно определяет некоторую $k+l$ -форму (т.е. что значение $\omega^k \wedge \omega^l(\xi_1, \dots, \xi_{k+l})$ зависит от векторов ξ полилинейно и кососимметрично).

ТЕОРЕМА. Определенное выше внешнее умножение форм косокмутативно, дистрибутивно и ассоциативно. Для одночленов оно совпадает с умножением, определенным в предыдущей лекции.

Доказательство косокмутативности основано на простейших свойствах четных и нечетных перестановок (см. задачу в конце лекции 25) и предоставляется читателю.

Дистрибутивность следует из того, что каждое слагаемое в (I) линейно относительно ω^k и ω^l .

Доказательство ассоциативности требует несколько больше комбинаторики; так как соответствующие рассуждения уже проводились в курсе алгебры при доказательстве теоремы Лапласа о разложении определителя по минорам столбцов, можно воспользоваться этой теоремой.

Начнем со следующего замечания. Если ассоциативность доказана для слагаемых, то она верна и для суммы, т.е.

$$\left. \begin{aligned} (\omega'_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega'_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) \\ (\omega''_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega''_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) \end{aligned} \right\} \text{влечет } ((\omega'_1 + \omega''_1) \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = (\omega'_1 + \omega''_1) \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

Ибо, в силу дистрибутивности, которая уже доказана, имеем

$$((\omega'_1 + \omega''_1) \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = ((\omega'_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3) + ((\omega''_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3)$$

$$(\omega'_1 + \omega''_1) \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega'_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)) + (\omega''_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3))$$

Но мы уже знаем из прошлой лекции, что всякая форма в R^n есть сумма одночленов. Поэтому достаточно доказать ассоциативность умножения одночленов.

Так как пока не доказана эквивалентность определения умножения k I-форм из прошлой лекции с общим определением (I), мы будем обозначать умножение k I-форм символом $\bar{\wedge}$, так что наши одночлены имеют вид

$$\omega^k = \omega_1 \bar{\wedge} \omega_2 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \omega_k, \omega^l = \omega_{k+1} \bar{\wedge} \omega_{k+2} \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \omega_{k+l}, \text{ где } \omega_1, \dots, \omega_{k+l} \text{ — I-формы.}$$

ЛЕММА. Внешнее произведение двух одночленов есть одночлен:

$$(\omega_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \omega_{k+l}) = \omega_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \omega_k \bar{\wedge} \omega_{k+1} \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \omega_{k+l}$$

Доказательство. Вычислим значения левой и правой части на $k+l$ векторах $\xi_1, \dots, \xi_{k+l}$. Значение правой части равно определителю $\det |\omega_i(\xi_j)|$ порядка $k+l$. Значение левой части, по формуле (I), равно сумме произведений

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \pm \det |\omega_i(\xi_{i_m})| \cdot \det |\omega_i(\xi_{j_m})|$$

миноров первых k столбцов определителя порядка $k+l$ на дополнительные миноры. Теорема Лапласа о разложении по минорам первых k столбцов как раз и утверждает, что эта сумма, с тем же правилом выбора знаков, что в определении (I), равна определителю $\det |\omega_i(\xi_j)|$. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что операции $\bar{\wedge}$ и $\wedge$ совпадают. Действительно, мы получаем, последовательно,

$$\omega_1 \bar{\wedge} \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$$

$$\omega_1 \bar{\wedge} \omega_2 \bar{\wedge} \omega_3 = (\omega_1 \bar{\wedge} \omega_2) \wedge \omega_3 = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$$

$$\omega_1 \bar{\wedge} \omega_2 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \omega_k = (\dots ((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3) \wedge \dots \wedge \omega_k)$$

Из очевидной ассоциативности $\bar{\wedge}$ -умножения k 1-форм следует поэтому ассоциативность $\wedge$ умножения одночленов. Тем самым, в силу сделанного выше замечания, ассоциативность доказана и в общем случае.

Задача. Докажите, что внешний квадрат 1-формы или вообще формы нечетного порядка равен 0: $\omega^k \wedge \omega^k = 0$, если k нечетно.

Пример I. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ систему $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, координат и 2-форму $\omega^2 = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$.

1*

Геометрически эта форма ω^2 означает сумму площадей ориентированных проекций параллелограмма на n координатных двумерных плоскостей $p_1, q_1; \dots; p_n, q_n$. В дальнейшем мы увидим, что 2-форма ω^2 имеет основное значение для Гамильтоновой механики.

Задача. Найти внешний квадрат 2-формы ω^2 .

Ответ. $\omega^2 \wedge \omega^2 = -2 \sum_{i,j} p_i \wedge p_j \wedge q_i \wedge q_j$

Задача. Найти внешнюю k -ую степень ω^2 .

Ответ. $\underbrace{\omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^2}_k = \pm k! \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} p_{i_1} \wedge p_{i_2} \wedge \dots \wedge p_{i_k} \wedge q_{i_1} \wedge q_{i_2} \wedge \dots \wedge q_{i_k}$

В частности,

$$\underbrace{\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^2}_n = \pm n! p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n$$

есть, с точностью до множителя, объем $2n$ -мерного параллелепипеда в R^{2n} .

Пример 2. Рассмотрим теперь ориентированное евклидово пространство R^3 . Каждому вектору $A \in R^3$ сопоставим 1-форму

ω'_A , полагая

$$\omega'_A(\xi) = (A, \xi) \quad (\text{скалярное произведение})$$

и 2-форму ω^2_A , полагая

$$\omega^2_A(\xi, \xi_2) = (A, \xi_1, \xi_2) \quad (\text{смешанное произведение})$$

Задача. Доказать, что отображения $A \rightarrow \omega'_A$ и $A \rightarrow \omega^2_A$ устанавливают изоморфизмы линейного пространства R^3 векторов A с линейными пространствами 1-форм в R^3 и 2-форм в R^3 . Если в R^3 выбрана ортонормированная, ориентированная система координат, x_1, x_2, x_3 , то

$$\omega'_A = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \quad \omega^2_A = A_1 x_2 \wedge x_3 + A_2 x_3 \wedge x_1 + A_3 x_1 \wedge x_2$$

Замечание. Итак, выписанные изоморфизмы не зависят от выбора ортонормированной и ориентированной системы координат x_1, x_2, x_3 . Но они зависят от выбора евклидовой структуры R^3 , а изоморфизм $A \rightarrow \omega_A^2$ зависит также и от ориентации (входящей неявно в определение смешанного произведения).

Задача. Доказать, что в силу установленных изоморфизмов внешнее умножение 1-форм превращается в векторное умножение векторов R^3 , т.е. что

$$\omega_A^1 \wedge \omega_B^1 = \omega^2[A, B] \quad \text{для любых } A, B \in R^3$$

Таким образом, внешнее умножение форм можно рассматривать как перенос на многомерный случай векторного умножения в R^3 - что представляет собой мечту многих первокурсников. Только в многомерном случае произведение не есть вектор: пространство 2-форм в R^n изоморфно R^n только при $n=3$.

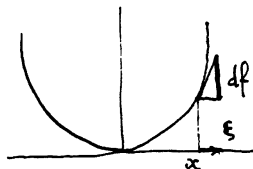
Задача. Доказать, что в силу установленных изоморфизмов внешнее умножение 1-форм на 2-форму превращается в скалярное умножение векторов R^3 :

$$\omega_A^1 \wedge \omega_B^2 = (A, B) x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

ЛЕКЦИЯ 27ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Простейшим примером дифференциальной формы является дифференциал функции.

Пример. Рассмотрим функцию $y = f(x) = x^2$. Ее дифференциал $df = 2x dx$ зависит от точки x и от "приращения аргумента", т.е. от касательного вектора ξ к оси x . Зафиксируем точку x . Тогда дифференциал функции в точке x , $df|_x$ зависит от ξ линейно. Так, если $x = 1$ и координата касательного вектора $\xi = 1$, то $df = 2$, а если $\xi = 10$, то $df = 20$.



Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ - дифференцируемая функция, заданная на многообразии M (можно представлять себе "функцию многих переменных" $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$). Дифференциал $df|_x$ функции f в точке x есть линейное отображение

$$df_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}^1$$

касательного пространства к M в точке x в вещественную прямую. Напомню определение этого отображения (см. лекцию 13).

Пусть $\xi \in TM_x$ - вектор скорости кривой: $x(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow M$, $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = \xi$. Тогда, по определению,

$$df_x(\xi) = \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0}$$

Задача. Пусть ξ - вектор скорости плоской кривой

$x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ при $t=0$. Вычис-

лечь значение дифференциалов dx, dy функций x, y на векторе ξ .

Ответ.

$$dx|_{1,0}(\xi) = 0, \quad dy|_{1,0}(\xi) = 1$$



Заметим, что дифференциал функции f в точке $x \in M$ есть 1-форма df_x на касательном пространстве TM_x .

Дифференциал df функции f на многообразии M есть гладкое отображение касательного пучка TM в прямую

$$df : TM \rightarrow \mathbb{R}' \quad (TM = \bigcup_x TM_x)$$

Это отображение линейно на каждом касательном пространстве $TM_x \in TM$, и дифференцируемо по x .

Определение. Дифференциальной формой степени 1 (или 1-формой) на многообразии M называется гладкое отображение

$$\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}'$$

касательного пучка многообразия M в прямую, линейное на каждом касательном пространстве TM_x .

Можно сказать, что дифференциальная 1-форма на M есть алгебраическая 1-форма на TM_x , дифференцируемая по x .

Задача. Докажите, что всякая дифференциальная 1-форма на прямой является дифференциалом некоторой функции.

Задача. На окружности и на плоскости найти дифференциальные 1-формы, не являющиеся дифференциалами никаких функций.

Пример. Общий вид дифференциальных 1-форм в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим в качестве многообразия M линейное пространство

с координатами $x_1, \dots, x_n$. Напомню, что компонентами $\xi_1, \dots, \xi_n$ касательного вектора $\xi \in TR_x^n$ называются значения дифференциалов координат $dx_1, \dots, dx_n$ на векторе ξ . Эти n 1-форм на TR_x^n линейно независимы. Итак, 1-формы $dx_1, \dots, dx_n$ образуют базис в n -мерном пространстве 1-форм на TR_x^n .

Следовательно, всякая 1-форма в TR_x^n однозначно записывается в виде $a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$, где a_i - вещественные коэффициенты.

Пусть теперь ω - произвольная дифференциальная 1-форма в R^n . В каждой точке x она однозначно разлагается по базису $dx_1, \dots, dx_n$. Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Всякая дифференциальная 1-форма в пространстве R^n с выбранной системой координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ однозначно записывается в виде

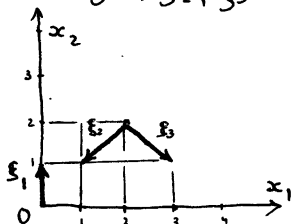
$$\omega = a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n$$

где коэффициенты $a_i(x)$ - гладкие функции.

Задача. Вычислить значения форм $\omega_1 = dx_1$, $\omega_2 = x_1 dx_2$, $\omega_3 = d\tau^2$ ($\tau^2 = x_1^2 + x_2^2$) на векторах ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Ответ.

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ω_1	0	-1	1
ω_2	0	-2	-2
ω_3	0	-8	0



Задача. Пусть $x_1, \dots, x_n$ - функции на многообразии M , образующие локальную координатную систему в некоторой области. Докажите, что каждая 1-форма в этой области однозначно записыва-

ется в виде $\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \dots + a_n(x)dx_n$.

Определение. Дифференциальной k -формой $\omega^k|_x$ в точке x многообразия M называется внешняя k -форма на касательном пространстве TM_x к M в x , т.е. k -линейная кососимметрическая функция от k векторов $\xi_1, \dots, \xi_k$, касательных к M в x .

Если такая форма $\omega^k|_x$ задана в каждой точке x многообразия M , и если она дифференцируема, то говорят, что дана k -форма ω^k на многообразии M .

Задача. Ввести естественную структуру дифференцируемого многообразия в множество, элемент которого - набор k векторов, касающихся M в какой-нибудь точке x .

Дифференциальная k -форма есть гладкое отображение полу-ченного многообразия в прямую.

Можно сказать, что k -форма на M есть внешняя k -форма на TM_x , зависящая дифференцируемым образом от x .

Сложение, умножение на число и внешнее умножение форм на M определяются поточечно: в каждой точке $x \in M$ надо сложить, умножить на число или внешнее перемножить соответствующие алгебраические внешние формы на касательном пространстве TM_x .

Задача. Докажите, что все k -формы на M образуют линейное пространство (бесконечной размерности, если k не превосходит размерности M).

Пример. Общий вид дифференциальных k -форм в R^n . Рассмотрим в качестве многообразия M линейное пространство R^n с фиксированными координатными функциями $x_1, \dots, x_n$: $R^n \rightarrow R^1$. Зафиксируем точки x . Мы видели выше,

что n 1-форм $dx_1, \dots, dx_n$ образуют базис в пространстве 1-форм на касательном пространстве TR_x^n .

Рассмотрим внешние произведения базисных форм

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

В лекции 25, мы видели, что эти C_n^k k -форм образуют базис в пространстве внешних k -форм на TR_x^n . Следовательно, каждая внешняя k -форма на TR_x^n однозначно записывается в виде

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

пусть теперь ω^k — произвольная дифференциальная k -форма в пространстве R^n . В каждой точке x она однозначно разлагается по выписанному выше базису. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА. Всякая дифференциальная k -форма в пространстве R^n с выбранной системой координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ однозначно записывается в виде

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

где $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$ — гладкие функции на R^n .

Задача. Вычислить значения форм $\omega_1 = dx_1 \wedge dx_2$;

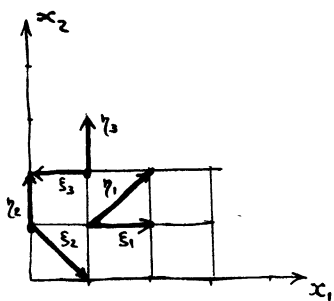
$$\omega_2 = x_1 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 dx_2 \wedge dx_1, \quad \omega_3 = \tau d\tau \wedge d\varphi,$$

где $x_1 = \tau \cos \varphi, x_2 = \tau \sin \varphi$ на парах векторов $(\xi_1, \eta_1),$

$$(\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$$

Ответ.

	(ξ_1, η_1)	(ξ_2, η_2)	(ξ_3, η_3)
ω_1	1	1	-1
ω_2	2	1	-3
ω_3	1	1	-1

Задача. Вычислить значения форм $\omega_1 = dx_2 \wedge dx_3$,

$$\omega_2 = x_1 dx_3 \wedge dx_2, \quad \omega_3 = dx_3 \wedge dx_2^2, \quad \tau^2 =$$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, на паре векторов $\xi = (1, 1, 1), \eta = (1, 2, 3)$ приложенных в точке $x = (2, 0, 0)$.

Ответ. $\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -2, \quad \omega_3 = -8$

Задача. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n : M \rightarrow \mathbb{R}^1$ - функции на многообразии, образующие локальную координатную систему в некоторой области. Докажите, что каждая дифференциальная форма в этой области однозначно записывается в виде

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Пример. Замена переменных в форме.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеются две системы координат: x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 . Пусть ω - 2-форма в $\mathbb{R}^3$. Тогда, по последней теореме, в системе x -координат ω записывается в виде $\omega = X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2$, где X_1, X_2, X_3 - функции от x_1, x_2, x_3 и в системе y -координат - в виде $\omega = Y_1 dy_2 \wedge dy_3 + Y_2 dy_3 \wedge dy_1 + Y_3 dy_1 \wedge dy_2$, где Y_1, Y_2, Y_3 - функции от y_1, y_2, y_3 .

Задача. Зная вид формы в x -координатах (т.е. X_i) и формулы замены переменных, $x = x(y)$, найти вид формы в y -координатах, т.е. Y_i .

Решение. Имеем $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_i}{\partial y_3} dy_3$.
Поэтому

$$dx_2 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 \right) \wedge \left(\frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \right)$$

откуда

$$Y_3 = X_1 \left| \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2)} \right| + X_2 \left| \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(y_1, y_2)} \right| + X_3 \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| \quad \text{и т.д.}$$

Добавление. Дифференциальные формы в трехмерном пространстве.

Пусть M - трехмерное ориентированное риманово многообразие (во всех дальнейших примерах M - евклидово трехмерное пространство R^3). Пусть x_1, x_2, x_3 - локальные координаты, и пусть квадрат элемента длины имеет вид

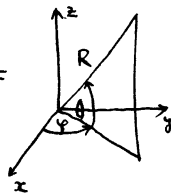
$$ds^2 = E_1 dx_1^2 + E_2 dx_2^2 + E_3 dx_3^2$$

(т.е. система координат триортогональная).

Задача. Найти E_1, E_2, E_3 для декартовых координат x, y, z , цилиндрических координат r, φ, z и сферических координат R, φ, θ в евклидовом R^3 .

Ответ.

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = \\ &= dR^2 + R^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2. \end{aligned}$$



Обозначим через e_1, e_2, e_3 орты координатных направлений. Эти три вектора образуют базис в касательном пространстве.

Задача. Найти значения форм dx_1, dx_2, dx_3 на векторах e_1, e_2, e_3 .

Ответ.

$dx_i(e_i) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}$, остальные 0. В частности: в декартовой системе $dx(e_x) = dy(e_y) = dz(e_z) = 1$; в цилиндрической $d\tau(e_\tau) = dz(e_z) = 1$, $d\varphi(e_\varphi) = \frac{1}{r}$; в сферической $dR(e_R) = 1$, $d\varphi(e_\varphi) = \frac{1}{R \cos \theta}$, $d\theta(e_\theta) = \frac{1}{R}$.

Метрика и ориентация многообразия M снабжают касательное пространство к M в каждой точке структурой евклидова ориентированного трехмерного пространства. В смысле этой структуры мы будем говорить о скалярных, векторных и смешанных произведениях.

Задача. Вычислить $[e_1, e_2]$, (e_R, e_θ) и (e_z, e_x, e_y) .

Ответ. $e_3, 0, 1$.

В ориентированном трехмерном евклидовом пространстве каждому вектору A соответствуют 1-форма ω_A^1 и 2-форма ω_A^2 определяемые условиями

$$\omega_A^1 = (A, \xi), \quad \omega_A^2(\xi, \eta) = (A, \xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in R^3$$

Поэтому каждому векторному полю A на нашем многообразии M соответствуют дифференциальная 1-форма ω_A^1 на M и дифференциальная 2-форма ω_A^2 на M .

Соответствие между векторными полями и формами не зависит от системы координат, но лишь от евклидовой структуры и ориентации.

Формулы перехода от полей к формам и обратно имеют в каждой системе координат свой специальный вид. Пусть в координатах x_1, x_2, x_3 , описанных выше, векторное поле имеет вид

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$$

(компоненты A_i — гладкие функции на многообразии M). Соответствующая 1-форма ω_A^1 разлагается по базису dx_i , а соответствующая 2-форма ω_A^2 — по базису $dx_i \wedge dx_j$.

Задача. Зная компоненты векторного поля $\mathbf{A}$, найти разложения 1-формы ω_A^1 и 2-формы ω_A^2 .

Решение. Имеем $\omega_A^1(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_1) = A_1$. В то же время $(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3)(\mathbf{e}_1) = a_1 dx_1(\mathbf{e}_1) = \frac{a_1}{\sqrt{E_1}}$. Отсюда находим $a_1 = A_1 \sqrt{E_1}$, так что

$$\omega_A^1 = A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3$$

Точно так же имеем $\omega_A^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = A_1$. В то же время

$$(\alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 dx_1 \wedge dx_2)(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}}$$

Отсюда $\alpha_1 = A_1 \sqrt{E_2 E_3}$, т.е.

$$\omega_A^2 = A_1 \sqrt{E_2 E_3} dx_2 \wedge dx_3 + A_2 \sqrt{E_3 E_1} dx_3 \wedge dx_1 + A_3 \sqrt{E_1 E_2} dx_1 \wedge dx_2$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в $\mathbb{R}^3$ векторному полю

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z = A_R \mathbf{e}_R + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_\theta \mathbf{e}_\theta$$

отвечает I-форма

$$\omega_A^1 = A_x dx + A_y dy + A_z dz = A_r dr + r A_\varphi d\varphi + A_z dz = A_R dR + R \cos \theta d\varphi + R d\theta$$

и 2-форма

$$\begin{aligned} \omega_A^2 &= A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy = r A_z d\varphi \wedge dz + \\ &+ A_\varphi dz \wedge dr + r A_z dr \wedge d\varphi = R^2 \cos \theta A_R d\varphi \wedge d\theta + \\ &+ R A_\varphi d\theta \wedge dR + R \cos \theta A_z dR \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Примером векторного поля на многообразии M является градиент функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Напомним, что градиентом функции называется векторное поле $g \operatorname{grad} f$, соответствующее дифференциалу:

$$\omega_{g \operatorname{grad} f}^1 = df, \text{ т.е. } df(\xi) = (g \operatorname{grad} f, \xi), \forall \xi$$

Задача. Найти компоненты градиента функции в базисе

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Решение. Имеем $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$. Согласно предыдущей задаче,

$$g \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{\partial f}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ 28

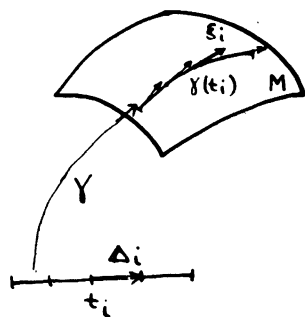
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Интеграл дифференциальной формы есть многомерное обобщение таких понятий, как поток жидкости через поверхность или работа силы на пути.

начнем с интегрирования 1-формы ω^1 на многообразии M пусть $\gamma: [0 \leq t \leq 1] \rightarrow M$ - гладкое отображение ("путь интегрирования"). Интеграл формы ω^1

на пути γ определяется как предел интегральных сумм. Каждая интегральная сумма составляется из значений формы ω^1 на касательных векторах ξ_i :

$$\int_{\gamma} \omega^1 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega^1(\xi_i)$$

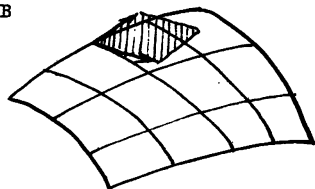


Касательные вектора ξ_i строятся следующим образом. Отрезок $0 \leq t \leq 1$ точками t_i делится на части $\Delta_i: t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Отрезок Δ_i можно рассматривать как касательный вектор Δ_i к оси t в точке t_i . Его образ в касательном пространстве к M в точке $\gamma(t_i)$ и есть

$$\xi_i = d\gamma|_{t_i}(\Delta_i) \in TM_{\gamma(t_i)}$$

При стремлении наибольшего из отрезков Δ_i к 0 интегральные суммы имеют предел (см. курс анализа). Он и называется интегралом 1-формы ω' по пути γ .

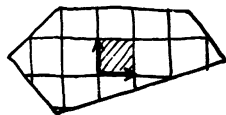
Замысел определения интеграла k -формы по k -мерной поверхности аналогичен. Поверхность интегрирования разбивается на малые криволинейные k -мерные параллелипипеды; эти параллелипипеды заменяются параллелипипедами в касательном пространстве, сумма значений формы на параллелипипедах касательного пространства стремится к интегралу при измельчении разбиения.



Рассмотрим вначале интеграл k -формы в k -мерном ориентированном евклидовом пространстве R^k . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ - ориентирующая система координат в R^k . Тогда всякая k -форма в R^k пропорциональна форме $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k$, т.е. имеет вид $\omega^k = \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, где $\varphi(x)$ - гладкая функция.

Пусть $\mathcal{D}$ - выпуклый ограниченный многогранник в R^k . По определению интегралом формы ω^k по $\mathcal{D}$ называется

$$\int_{\mathcal{D}} \omega^k = \int_{\mathcal{D}} \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$



где интеграл справа понимается как предел обычных римановых интегральных сумм.

Такое определение является реализацией намеченного выше замысла, так как в рассматриваемом случае касательное пространство к многообразию отождествляется с многообразием.

Задача. Докажите, что $\int_{\mathcal{P}} \omega^k$ зависит от ω^k линейно.

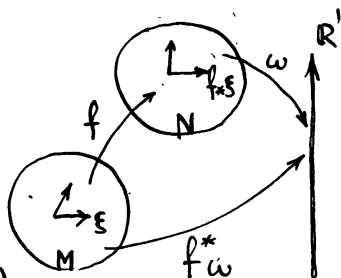
Задача. Докажите, что если разбить $\mathcal{P}$ на два выпуклых многогранника, $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, то $\int_{\mathcal{P}} \omega^k = \int_{\mathcal{P}_1} \omega^k + \int_{\mathcal{P}_2} \omega^k$.

В общем случае (k -форма в n -мерном пространстве) отождествить элементы разбиения с касательными параллелипипедами не так просто; ниже мы сведем этот случай к рассмотренному.

Поведение дифференциальных форм при отображениях.

Пусть $f: M \rightarrow N$ - дифференцируемое отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N и ω - дифференциальная k -форма на N .

Тогда на M также возникает определенная k -форма; она обозначается через $f^*\omega$ и определяется соотношением



$$(f^*\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(f_*\xi_1, \dots, f_*\xi_k)$$

при любых касательных векторах $\xi_1, \dots, \xi_k \in TM_x$. Здесь

f_* есть дифференциал отображения f .

Иными словами, значение формы $f^*\omega$ на векторах $\xi_1, \dots, \xi_k$ равно значению формы ω на образах этих векторов.

Пример. Если $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ и $\omega = dy$,

то

$$f^* \omega = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2$$

Задача. Докажите, что $f^* \omega$ есть k -форма на M .

Задача. Докажите, что отображение f^* сохраняет операции над формами:

$$f^*(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 f^*(\omega_1) + \lambda_2 f^*(\omega_2)$$

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^* \omega_1) \wedge (f^* \omega_2)$$

Задача. Пусть $g: L \rightarrow M$ - дифференцируемое отображение. Докажите, что $(fg)^* = g^* f^*$.

Задача. Пусть Φ_1 и Φ_2 - два замкнутых выпуклых многогранника в ориентированном k -мерном пространстве R^k , и $f: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ - дифференцируемое отображение, осуществляющее диффеоморфизм^{x)}, сохраняющее ориентацию отображение внутренности Φ_1 на внутренность Φ_2 . Тогда для любой дифференциальной k -формы ω^k в Φ_2

$$\int_{\Phi_1} f^* \omega^k = \int_{\Phi_2} \omega^k$$

Указание. Это - теорема о замене переменной в кратном интеграле:

$$\int_{\Phi_1} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \varphi(y(x)) dx_1, \dots, dx_n = \int_{\Phi_2} \varphi(y) dy_1, \dots, dy_n$$

x) т.е. взаимно-однозначное и взаимно-дифференцируемое.

Интегрирование k -формы на n -мерном многообразии.

Пусть ω -дифференциальная k -форма на n -мерном многообразии M .

Пусть D -ограниченный выпуклый k -мерный многогранник в k -мерном евклидовом пространстве R^k .

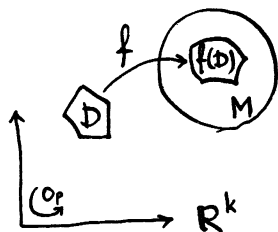
Роль "пути интегрирования" будет играть k -мерный кусок σ в M , представляющий собой тройку $\sigma = (D, f, o_p)$, состоящую из

1) выпуклого многогранника $D \in R^k$.

2) дифференцируемое отображения

$$f: D \rightarrow M$$

3) ориентации $R^k: o_p$



Определение. Интегралом k -формы ω по k -мерному куску σ называется интеграл соответствующей формы по многограннику

$$\int_{\sigma} \omega = \int_D f^* \omega$$

Задача. Докажите, что интеграл зависит от формы линейно:

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma} \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 = \lambda_1 \int_{\sigma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\sigma} \omega_2$$

k -мерный кусок, отличающийся от σ лишь выбором ориентации o_p , называется противоположным и обозначается $-\sigma$ или $-1 \cdot \sigma$.

Задача. Докажите, что при изменении ориентации интеграл меняет знак:

$$\int_{-\sigma} \omega = - \int_{\sigma} \omega$$



Множество $f(\Phi)$ не обязательно является гладким подмногообразием M . Оно может иметь "самопересечения", любые "складки" и вырождаться даже в точку.

Но, если, все же, f осуществляет диффеоморфизм внутренности Φ с гладким подмногообразием $N \in M$, то мы скажем, что кусок σ представляет ориентированное многообразие N .

Уже в одномерном случае ясно, что неудобно ограничиваться контурами интегрирования, состоящими из одного куска: полезны также контуры, составленные из нескольких кусков, которые могут проходить в ту или иную сторону, по несколько раз. Аналогичное понятие в многомерном случае называется цепью.

Определение. Цепь размерности k на многообразии M состоит из конечного набора k -мерных ориентированных кусков $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_z$ в M и целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_z$ называемых кратностями (кратности могут быть положительными, отрицательными или нулями). Цепь обозначается

$$C_k = m_1 \sigma_1 + \dots + m_z \sigma_z$$

при этом вводятся естественные отождествления

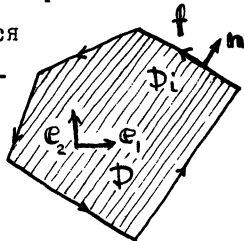
$$m_1 \sigma + m_2 \sigma = (m_1 + m_2) \sigma$$

$$m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 = m_2 \sigma_2 + m_1 \sigma_1, \quad 0 \sigma = 0, \quad C_k + 0 = C_k$$

Задача. Докажите, что множество всех k -мерных цепей в многообразии M становится коммутативной группой, если определить сложение цепей формулой

$$\begin{aligned} (m_1 \sigma_1 + \dots + m_z \sigma_z) + (m'_1 \sigma'_1 + \dots + m'_z \sigma'_z) = \\ = m_1 \sigma_1 + \dots + m_z \sigma_z + m'_1 \sigma'_1 + \dots + m'_z \sigma'_z \end{aligned}$$

пример: граница многогранника. Пусть $\mathcal{D}$ -ориентированный, выпуклый k -мерный многогранник в k -мерном евклидовом пространстве R^k . Границей $\mathcal{D}$ называется $k-1$ -мерная цепь $\partial\mathcal{D}$ в R^k , определенная следующим образом.



Кусками σ_i , цепи $\partial\mathcal{D}$ являются $k-1$ мерные грани $\mathcal{D}_i$ многогранника $\mathcal{D}$ вместе с отображениями $f_i: \mathcal{D}_i \rightarrow R^k$ вложения граней в R^k и ориентациями o_i , определенными ниже; кратности же равны 1:

$$\partial\mathcal{D} = \sum \sigma_i, \quad \sigma_i = (\mathcal{D}_i, f_i, o_i)$$

Правило ориентации граней. Пусть $e_1, \dots, e_k$ - ориентирующий репер R^k . Пусть $\mathcal{D}_i$ - одна из граней $\mathcal{D}$. Выберем внутреннюю точку $\mathcal{D}_i$ и построим в ней вектор n внешней нормали к многограннику $\mathcal{D}$. Ориентиующим грань $\mathcal{D}_i$ репером будет такой репер $f_1, \dots, f_{k-1}$ в $\mathcal{D}_i$, для которого репер $(n, f_1, \dots, f_{k-1})$ ориентирован правильно (т.е. как репер $e_1, \dots, e_k$).

Граница цепи. определяется аналогичным образом.

Пусть $\sigma = (\mathcal{D}, f, o)$ - k -мерный кусок в многообразии M . Его границей $\partial\sigma$ называется $k-1$ -цепь: $\partial\sigma = \sum \sigma_i$ составленная из кусков $\sigma_i = (\mathcal{D}_i, f_i, o_i)$, где $\mathcal{D}_i$ - $k-1$ -мерные грани $\mathcal{D}$, o_i - ориентации, выбранные согласно приведенному выше правилу, f_i - ограничение отображения $f: \mathcal{D} \rightarrow M$ на грань $\mathcal{D}_i$.

Границей ∂c_k k -мерной цепи c_k в M называется сумма границ кусков цепи c_k с кратностями:

$$\partial c_k = \partial (m_1 \sigma_1 + \dots + m_z \sigma_z) = m_1 \partial \sigma_1 + \dots + m_z \partial \sigma_z$$

Очевидно, ∂c_k есть $k-1$ -
цепь на M . *)



Задача. Доказать, что граница
границы любой цепи равна 0: $\partial \partial c_k = 0$.

Указание. Ввиду линейности ∂ , достаточно доказать
 $\partial \partial D = 0$ для выпуклого многогранника D . Остается про-
верить, что каждая $k-2$ -мерная грань D входит в цепь $\partial \partial D$
дважды, с разными знаками. Это достаточно проверить для $k=2$
(плоские сечения).

Интеграл формы по цепи. Пусть теперь ω^k есть k -фор-
ма на многообразии M , а c_k k -цепь на M , $c_k =$
 $= \sum m_i \sigma_i$. Интегралом формы ω^k по цепи c_k называется
сумма интегралов по кускам, с учетом кратностей

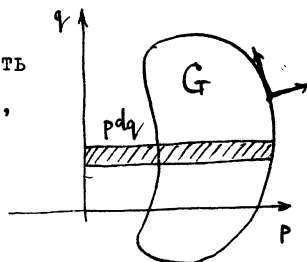
$$\int_{c_k} \omega^k = \sum m_i \int_{\sigma_i} \omega^k$$

Задача. Докажите, что интеграл линейно зависит от формы:

$$\int_{c_k} \omega_1^k + \omega_2^k = \int_{c_k} \omega_1^k + \int_{c_k} \omega_2^k.$$

Задача. Докажите, что интегрирование фиксированной формы
 ω^k по цепям c_k определяет гомоморфизм группы цепей в
прямую $\int \omega^k: c_k \rightarrow \int \omega^k$.

Пример I. Пусть M^2 есть плоскость
 $\{(p, q)\}$, форма ω^1 есть $p dq$,
цепь c_1 состоит из одного куска σ_1
с кратностью 1:



*) Мы считаем здесь $k > 1$.

Одномерные цепи c_1 включаются в общую схему, если принять
следующие определения. Нульмерная цепь состоит из набора точек
с кратностями. Граница ориентированного отрезка AB есть $B-A$
(точка B с кратностью 1, A с кратностью -1). Граница точ-
ки пуста.

$$[0 \leq t \leq 2\pi] \xrightarrow{t} (p = \cos t, q = \sin t)$$

Тогда

$$\int_{C_1} p dq = \pi$$

Вообще, если цепь C_1 представляет границу области G , то $\int p dq$ равен площади G , со знаком $+$ или $-$, в зависимости от того, ориентирована ли пара векторов (внешняя нормаль, ориентирующий вектор границы) так же, как базисная пара $(\text{орн } p, \text{орн } q)$, или наоборот.

Пример 2. Пусть M есть ориентированное трехмерное евклидово пространство R^3 . Тогда каждая 1-форма в M соответствует некоторому векторному полю: $A: \omega^1 = \omega^1_A$ (так что $\omega^1_A(\xi) = (A, \xi)$).

Интеграл формы ω^1_A по цепи C_1 , представляющей ориентированную кривую ℓ называется циркуляцией поля A по кривой ℓ :

$$\int_{C_1} \omega^1_A = \int_{\ell} (A, d\ell)$$

Каждая 2-форма в M также соответствует некоторому полю $A: \omega^2 = \omega^2_A$ (так что $\omega^2_A(\xi, \eta) = (A, \xi, \eta)$). Интеграл формы ω^2_A по цепи C_2 , представляющей ориен-

тированную поверхность S , называется потоком поля A через поверхность S :

$$\int_{C_2} \omega_A^2 = \int_S (A, dn)$$

Задача. Найти поток поля $A = \frac{1}{R^2} e_R$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ориентированную векторами e_x, e_y в точке $z = 1$. Найти поток того же поля через поверхность эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2 = 1$, ориентированную так же.

Указание: см. стр. 47.

Задача. Пусть в $2n$ -мерном пространстве $R^{2n} = \{(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)\}$ дана 2-цепь C_2 , представляющая ориентированную двумерную поверхность S с краем ℓ . Найти

$$\int_{C_2} dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n \text{ и } \int_{\ell} p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

Ответ. Сумма ориентированных площадей проекций S на координатные двумерные плоскости $p_i q_i$.

ЛЕКЦИИ 29

ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Внешний дифференциал формы ω на многообразии M есть $k+1$ форма, $\partial\omega$, на том же многообразии. Переход от формы к ее внешнему дифференциалу аналогичен образованию дифференциала функции или дивергенции векторного поля. напомним определение дивергенции.

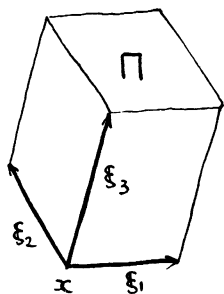
Пусть A -векторное поле в евклидовом ориентированном

трехмерном пространстве R^3 , и S - граница параллелепипеда Π с ребрами

ξ_1, ξ_2, ξ_3 при вершине x :

$S = \partial \Pi$. Рассмотрим поток поля A через поверхность S ("наружу")

$$F(\Pi) = \int_S (A, dm)$$



Если параллелепипед Π очень мал, то поток F приблизительно пропорционален произведению объема параллелепипеда,

$V = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, на "плотность источников" в точке x .

Иными словами, существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\varepsilon \Pi)}{\varepsilon^3 V}$$

где $\varepsilon \Pi$ - параллелепипед с ребрами $\varepsilon \xi_1, \varepsilon \xi_2, \varepsilon \xi_3$. Этот предел не зависит от выбора параллелепипеда Π , но лишь от точки x , и называется дивергенцией поля A в x , $\operatorname{div} A$.

Чтобы перейти к многомерному случаю, заметим, что "поток через элемент поверхности" есть 2-форма, которую мы обозначили ω_A^2 . Дивергенция же есть плотность в выражении 3-формы

$$\omega^3 = \operatorname{div} A \, dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\omega^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \operatorname{div} A \cdot V(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

характеризующей "источники в элементарном параллелепипеде".

Внешний дифференциал $d\omega^k$ k -формы ω^k на n -мерном многообразии M определяется как главная полилинейная часть

интеграла ω^k по границе $k+1$ -мерного параллелипипеда. Точное определение состоит в следующем.

Определим значение $d\omega$ на $k+1$ векторе $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$, касающемся M в x . Рассмотрим для этого какую-нибудь систему координат в окрестности точки x на M , т.е. диффеоморфное отображение f окрестности 0 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ на окрестности точки x в M .

Прообразы векторов $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in T\mathbb{R}^n$ при дифференциале f лежат в касательном пространстве к $\mathbb{R}^n$ в 0 . Это касательное пространство естественно отождествляется с $\mathbb{R}^n$, поэтому можно считать прообразы векторами

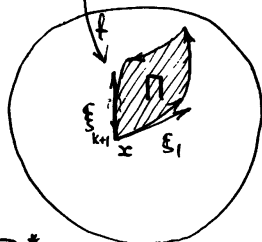
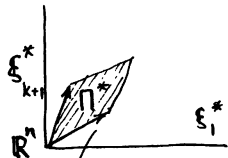
$$\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^* \in \mathbb{R}^n$$

Натянем на эти $k+1$ вектор в $\mathbb{R}^n$ параллелипипед Π^* (строго говоря,

надо рассмотреть стандартный ориентированный куб в $\mathbb{R}^{k+1}$ и его линейное отображение на Π^* , переводящее ребра $e_1, \dots, e_{k+1}$ в $\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^*$, как $k+1$ -мерный кусок в $\mathbb{R}^n$).

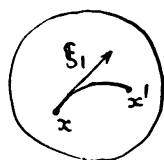
Отображение f переводит параллелипипед Π^* в $k+1$ -мерный кусок Π на M ("криволинейный параллелипипед"). Граница куска Π есть k -мерная цепь, $\partial\Pi$. Рассмотрим интеграл формы ω^k по границе $\partial\Pi$ параллелипипеда Π

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \int_{\partial\Pi} \omega^k$$



Пример. Будем называть 0-формой на M гладкую функцию $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^1$. Интегралом 0-формы φ по 0-цепи $C_0 = \sum m_i A_i$ (где m_i — целые, A_i — точки M) назовем

$$\int \varphi = \sum m_i \varphi(A_i)$$



Тогда предыдущее определение дает "приращение": $F(\xi_1) = \varphi(x') - \varphi(x)$ функции φ , а главная линейная часть $F(\xi_1)$ в 0 есть просто дифференциал $\varphi : d\varphi$.

Задача. Докажите, что функция $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$ кососимметрична по ξ . Оказывается, главная $k+1$ -линейная часть "приращения" $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$ есть внешняя $k+1$ -форма на касательном пространстве TM_x к M в x . Эта форма не зависит от системы координат, с помощью которой определялся криволинейный параллелепипед Π . Она называется внешним дифференциалом формы ω^k (в точке x) и обозначается $d\omega^k$.

ТЕОРЕМА (о внешнем дифференциале). На TM_x существует и единственна $k+1$ -форма Ω , которая является главной $k+1$ -линейной частью в 0 интеграла по границе криволинейного параллелепипеда $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$; т.е.

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \varepsilon^{k+1} \Omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + o(\varepsilon^{k+1})^{(I)} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

форма Ω не зависит от выбора системы координат, участвующей в определении F .

М Если в локальной системе координат $x_1, \dots, x_n$ на форма ω^k записывается в виде

$$\omega^k = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

то форма Ω записывается в виде

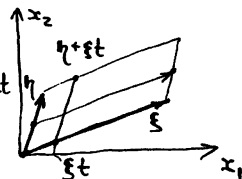
$$\Omega = d\omega^k = \sum da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы я приведу для случая формы $\omega^1 = a(x_1, x_2) dx_1$ на плоскости x_1, x_2 . В общем случае доказательство совершенно аналогичное, но выкладки несколько длиннее.

Сосчитаем значение F , т.е. интеграл ω^1 по границе параллелограмма Π со сторонами ξ, η и вершиной в 0.

Цепь $\partial\Pi$ задается отображениями отрезка $0 \leq t \leq 1$ на плоскость $t \rightarrow \xi t$, $t \rightarrow \xi + \eta t$, $t \rightarrow \eta t$, $t \rightarrow \eta + \xi t$ с кратностями $1, 1, -1, -1$. Поэтому

$$\int_{\partial\Pi} \omega^1 = \int_0^1 [a(\xi t) - a(\xi + \eta t)] \xi_1 - [a(\eta t) - a(\eta + \xi t)] \eta_1 dt$$



где $\xi_1 = dx_1(\xi)$, $\eta_1 = dx_1(\eta)$

$\xi_2 = dx_2(\xi)$, $\eta_2 = dx_2(\eta)$ — компоненты векторов ξ , η . Но $a(\xi t + \eta) - a(\xi t) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \eta_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \eta_2 + O(\xi^2 \eta)$ (производные берутся при $x_1 = x_2 = 0$). Точно так же

$$a(\eta t + \xi) - a(\eta t) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \xi_2 + O(\xi_1^2 \eta^2)$$

Подставляя эти выражения в интеграл, находим

$$F(\xi, \eta) = \int_{\partial \Pi} \omega' = \frac{\partial a}{\partial x_2} (\xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2) + O(|\xi|^2, |\eta|^2)$$

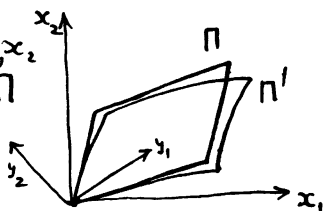
Главная билинейная часть F , как обещано в (I), оказалась значением внешней 2-формы

$$\Omega = \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1$$

на паре векторов ξ, η . При этом полученная форма дается формулой (2), ибо

$$da \wedge dx_1 = \frac{\partial a}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 = \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1$$

Наконец, если систему координат x_1, x_2 заменить другой, то параллелограмм Π заменится близким криволинейным параллелограммом Π' , так что разница значений интегралов



$\int_{\partial \Pi} \omega' - \int_{\partial \Pi'} \omega'$ будет малой выше второго порядка (проверьте!).

Задача. Провести доказательство теоремы в общем случае.

Задача. Доказать формулы дифференцирования суммы и произведения:

$$d(\omega^k \wedge \omega^l) = d\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l$$

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

Задача. Доказать, что дифференциал дифференциала равна 0:

$$dd = 0.$$

Одним из важнейших следствий теоремы о внешнем дифференциале является

Формула Ньютона-Лейбница-Гаусса-Грина-Остроградского-Стокса-Пуанкаре.

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega \quad (3)$$

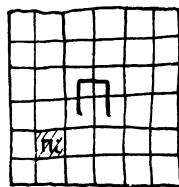
где C - любая $k+1$ -цепь на многообразии M , а ω^k - любая k -форма на многообразии M .

Доказательство. этой формулы достаточно провести для случая, когда цепь состоит из одного куска σ . Предположим сначала, что этот кусок σ задается ориентированным параллелипипедом $\Pi \in R^{k+1}$

Разобьем Π на N^{k+1} малых равных параллелипипедов Π_i , подобных Π .

Тогда, очевидно,

$$\int_{\partial \Pi} \omega = \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i, \text{ где } F_i = \int_{\partial \Pi_i} \omega$$



По формуле (I) имеем

$F_i = d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i) + o(N^{-(k+1)})$, где $\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i$ - ребра Π_i . Но $\sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i)$ есть интегральная сумма для $\int_{\Pi} d\omega$. Легко проверить, что $o(N^{-(k+1)})$ - равномерное, поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i) = \int_{\Pi} d\omega$$

Окончательно находим

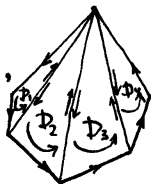
$$\int_{\partial \Pi} \omega = \sum F_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum F_i = \int_{\Pi} d\omega$$

Отсюда автоматически следует формула (3) для любой цепи, многогранники которой $\neq$ параллелипипеды.

Чтобы доказать формулу (3) для любого выпуклого многогранника Φ , достаточно доказать ее для симплекса^{*)}, так как Φ всегда можно разбить на симплексы:

$$\Phi = \sum \Phi_i, \quad \partial \Phi = \sum \partial \Phi_i$$

Докажем формулу (3) для симплекса. Заметим, что k -мерный ориентированный куб можно дифференцируемое отобразить на k -мерный ориентированный симплекс так, что

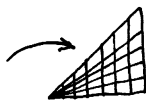


1) внутренность куба диффеоморфно и с сохранением ориентации переходит во внутренность симплекса.

2) внутренность некоторых $k-1$ -мерных граней куба диффеоморфно и с сохранением ориентации переходят во внутренности граней симплекса; образы остальных $k-1$ -мерных граней куба лежат в $k-2$ -мерных гранях симплекса.

Например, для $k=2$ такое отображение куба $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ на треугольник дается формулами $y_1 = x_1$,

$$y_2 = x_1 x_2$$



*) Двумерный симплекс есть треугольник, 3-мерный - тетраэдр, k -мерный - выпуклая оболочка $k+1$ точек в R^n , не лежащей в $k-1$ мерной плоскости.

Пример: $\{x \in R^k : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i \leq 1\}$

Теперь формула (3) для симплекса вытекает из доказанной формулы (3) для куба и теоремы о замене переменной (см. стр. 29).

Формула (3) доказана полностью.

Пример 1. Рассмотрим в R^{2n} с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ 1-форму $\omega' = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$. Тогда $d\omega' = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$, поэтому

$$\iint_{C_2} dp \wedge dq = \int_{\partial C_2} p dq$$

В частности, если C_2 - замкнутая поверхность ($\partial C_2 = 0$), то $\iint_{C_2} dp \wedge dq = 0$.

Пример 2. Векторный анализ. В трехмерном ориентированном римановом пространстве M всякому векторному полю A соответствует 1-форма ω_A^1 и 2-форма ω_A^2 . Поэтому внешнее дифференцирование можно рассматривать как векторную операцию.

Внешнему дифференцированию 0 форм (функций), 1 форм и 2 форм отвечают операции градиента, ротора и дивергенции, определенные соотношениями

$$df = \omega_{\text{grad} f}^1, d\omega_A^1 = \omega_{\text{rot} A}^2, d\omega_A^2 = \text{div} A \omega^3$$

(форма ω^3 - элемент объема на M). Итак, из (3) вытекает

$$f(y) - f(x) = \int_{\ell} \text{grad} f \cdot d\ell, \int_{\ell} A d\ell = \iint_S \text{rot} A \cdot d\eta,$$

$$\iint_S A d\eta = \iiint_{\Phi} \text{div} A \omega^3, \text{ если } \partial \ell = y-x \quad \text{если } \partial S = \ell$$

Задача. Докажите, что

$$\text{div} [A, B] = (\text{rot} A, B) - (\text{rot} B, A)$$

$$\text{rot} aA = [\text{grad} a, A] + a \text{rot} A$$

$$\text{div} aA = (\text{grad} a, A) + a \text{div} A$$

указание. По формуле дифференцирования произведения форм,

$$d(\omega_{[A,B]}^2) = d(\omega_A' \wedge \omega_B') = d\omega_A' \wedge \omega_B' - \omega_A' \wedge d\omega_B'$$

Задача. Докажите, что $\text{rot grad} = \text{div rot} = 0$.

Указание. $dd = 0$.

Добавление I. Векторные операции в триортогональной системе.

Пусть x_1, x_2, x_3 - триортогональная система координат в M , $ds^2 = E_1 dx_1^2 + E_2 dx_2^2 + E_3 dx_3^2$, e_i - координатные орты (см. стр. 24).

Задача. Зная компоненты векторного поля $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$, найти компоненты его ротора.

Решение. Согласно стр. 25, $\omega_A' = A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3$. Поэтому

$$d\omega_A' = \left(\frac{\partial A_3 \sqrt{E_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2 \sqrt{E_2}}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \dots = \omega_{\text{rot } A}^2$$

По стр. 25 находим

$$\text{rot } A = \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}} \left(\frac{\partial A_3 \sqrt{E_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2 \sqrt{E_2}}{\partial x_3} \right) e_1 + \dots = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \begin{vmatrix} \sqrt{E_1} e_1 & \sqrt{E_2} e_2 & \sqrt{E_3} e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 \sqrt{E_1} & A_2 \sqrt{E_2} & A_3 \sqrt{E_3} \end{vmatrix}$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в R^3 :

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) e_1 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) e_2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) e_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) e_z + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e_r + \\
&+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \right) e_z = \frac{1}{R \cos \theta} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi \cos \theta}{\partial \theta} \right) e_r + \\
&+ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial R A_\theta}{\partial R} \right) e_\varphi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R A_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) e_\theta
\end{aligned}$$

Задача. Найти дивергенцию поля $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$.

Решение. $\omega_A^2 = A_1 \sqrt{E_2 E_3} dx_2 \wedge dx_3 + \dots$ Следовательно,

$$d\omega_A^2 = \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 \sqrt{E_2 E_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \dots$$

По определению дивергенции $d\omega_A^2 = \operatorname{div} A \sqrt{E_1 E_2 E_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Значит

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} A_1 \sqrt{E_2 E_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 \sqrt{E_3 E_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} A_3 \sqrt{E_1 E_2} \right)$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в R^3 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} A &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \\
&= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \\
&= \frac{1}{R \cos \theta} \left(\frac{\partial R \cos \theta A_r}{\partial R} + \frac{\partial R A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R \cos \theta A_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Задача. Оператором Лапласа на M называется оператор $\Delta = \text{div} \text{grad}$. Найти его выражение в координатах x_i .

Ответ. $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\frac{E_2 E_3}{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \dots \right]$. В частности, в R^3 :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

Добавление 2.

Замкнутые формы и циклы.

Поток жидкости (без источников) через край области Φ равен нулю.

Многомерный аналог потока без источников называется замкнутой формой. Поле A не имеет источников, если $\text{div} A = 0$

определение. Дифференциальная форма ω на многообразии M замкнута, если ее дифференциал есть ноль: $d\omega = 0$.

В частности, 2-форма ω_A^2 , отвечающая полю без источников A , замкнута. Из формулы ИЛГОС (3) сразу следует

ТЕОРЕМА. Интеграл замкнутой формы ω^k по границе любой $k+1$ -мерной цепи C_{k+1} равен 0: $\int_{\partial C_{k+1}} \omega^k = 0$, если $d\omega^k = 0$.

Задача. Докажите, что дифференциал формы всегда замкнут. С другой стороны, существуют замкнутые формы, не являющиеся

дифференциалами.

Например, рассмотрим в качестве многообразия M трех-
мерное евклидово пространство R^3 без точки 0 : $M = R^3 - 0$,
а в качестве 2-формы - поток поля $A = \frac{1}{R^2} e_R$.
Легко убедиться, что $\operatorname{div} A = 0$,
так что наша 2-форма ω_A^2 замкнута.



В то же время поток через любую
сферу с центром в начале равен 4π .

Покажем, что интеграл дифференциала формы по сфере должен рав-
няться 0.

Определение. Циклом на многообразии M называется
цепь, граница которой равна 0.

Ориентированную поверхность нашей сферы можно рассматри-
вать как цикл. Из формулы НЛГЭС (3) сразу следует.

ТЕОРЕМА. Интеграл дифференциала по любому циклу равен 0:

$$\int_{C_{k+1}} d\omega^k = 0, \text{ если } \partial C_{k+1} = 0$$

Итак, наша 2-форма ω_A^2 не есть дифференциал никакой 1-формы.

Существование на многообразии M замкнутых форм, не
являющихся дифференциалами, связано с топологическими свойства-
ми M . Можно показать, что в евклидовом пространстве всякая
замкнутая k -форма есть дифференциал некоторой $k-1$ -формы.
("лемма Пуанкаре").

Задача. Докажите лемму Пуанкаре для 1-форм.

Указание. Рассмотрите $\int_{x_0}^{x_1} \omega' = \varphi(x_1)$.

Задача. Докажите, что в евклидовом пространстве интеграл замкнутой формы по любому циклу равен 0.

Указание. Построить $k+1$ цепь, границей которой является данный цикл.



Добавление 3. Когомологии и гомологии.

Все k -формы на M образуют линейное пространство, замкнутые k -формы - его подпространство, а дифференциалы $k+1$ -форм - подпространство пространства замкнутых форм. Факторпространство

$$\frac{(\text{замкнутые формы})}{(\text{дифференциалы})} = H^k(M, \mathbb{R})$$

называется k -мерной группой когомологий M . Элементом этой группы является класс замкнутых форм, отличающихся друг от друга лишь на дифференциал.

Задача. Доказать, что для окружности S^1 имеем

$$H^1(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Размерность $H^k(M, \mathbb{R})$ называется k -мерным числом

Бетти многообразия M .

Задача. Найти одномерное число Бетти тора $T^2 = S^1 \times S^1$.

Поток жидкости (без источников) через поверхности двух concentрических сфер одинаков. Вообще, при интегрировании замкнутой формы по k -мерному циклу можно заменять цикл на другой, при условии, что их разность есть граница $k+1$ -мерной цепи ("пленки"):

$$\int_a \omega^k = \int_b \omega^k$$

, если $a - b = \partial c_{k+1}$ и $d\omega^k = 0$

Такие два цикла α, β Пуанкаре назвал гомологичными.

При надлежащем определении*) группы цепей на многообразии M и лежащих в ней подгрупп циклов и границ (т.е. циклов, гомологичных 0), фактор группа



$$\frac{(\text{циклы})}{(\text{границы})} = H_k(M)$$



называется k -мерной группой гомологий M .

Элементом этой группы является класс гомологичных друг другу циклов.

Ранг этой группы также равен k -мерному числу Бетти M . (теорема Дэ Рама").

*) Наму группу цепей C_k следует для этого уменьшить, отождествив между собой куски, отличающиеся лишь выбором параметризации f и выбором многогранников Φ . В частности, можно считать, что Φ всегда один и тот же симплекс или куб. Далее, следует считать равным 0 всякий k -мерный кусок, $(\Phi, f, 0)$, если он вырожден, т.е. $f = f_2 \cdot f_1$, где $f_1: \Phi \rightarrow \Phi'$ и Φ' имеет меньше, чем k измерений.

Подп. к печати 14/IX-67г. Л-42154. Ф. 60х90 1/16
Физ.л.л. 2,25. Уч.-изд.л. 1,95. Зак. 1730. Тир. 650
Бум. офс. № 2. Цена 5 коп.

Отпечатано на ротационных в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы

